Normalisation by evaluation for an intrinsic syntax of type theory

Ambrus Kaposi
Eötvös Loránd University, Budapest

joint work with Thorsten Altenkirch (STSM)

EUTypes Meeting, Ljubljana
31 January 2017

Extrinsic syntax

$$
\begin{aligned}
\Gamma &\in \mathsf{Con} ::= \cdot \mid \Gamma, A \\
A &\in \mathsf{Ty} ::= \iota \mid \Pi\, A\, A' \\
t &\in \mathsf{Tm} ::= x \mid \mathsf{lam}_A\, t \mid \mathsf{app}\, t\, t'
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\vdash \Gamma \qquad \Gamma \vdash A}{\vdash \Gamma, A}
\quad
\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash \Pi\, A\, B}
\quad
\frac{\Gamma, A \vdash t : B}{\Gamma \vdash \mathsf{lam}\, t : \Pi\, A\, B}
$$

...

Intrinsic syntax

Constructors for the inductive inductive type:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{Con} &: \mathsf{Set} \\
\mathsf{Ty} &: \mathsf{Con} \to \mathsf{Set} \\
\mathsf{Tm} &: (\Gamma : \mathsf{Con}) \to \mathsf{Ty}\,\Gamma \to \mathsf{Set} \\
-,- &: (\Gamma : \mathsf{Con}) \to \mathsf{Ty}\,\Gamma \to \mathsf{Con} \\
\Pi &: (A : \mathsf{Ty}\,\Gamma) \to \mathsf{Ty}\,(\Gamma, A) \to \mathsf{Ty}\,\Gamma \\
\mathsf{lam} &: \mathsf{Tm}\,(\Gamma, A)\,B \to \mathsf{Tm}\,\Gamma\,(\Pi\,A\,B) \\
\ldots
\end{aligned}
$$

Conversion relation

Constructors for the quotient inductive inductive type:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{Con} &: \mathsf{Set} \\
\mathsf{Ty} &: \mathsf{Con} \to \mathsf{Set} \\
\mathsf{Tm} &: (\Gamma : \mathsf{Con}) \to \mathsf{Ty}\,\Gamma \to \mathsf{Set} \\
-,- &: (\Gamma : \mathsf{Con}) \to \mathsf{Ty}\,\Gamma \to \mathsf{Con} \\
\Pi &: (A : \mathsf{Ty}\,\Gamma) \to \mathsf{Ty}\,(\Gamma, A) \to \mathsf{Ty}\,\Gamma \\
\mathsf{lam} &: \mathsf{Tm}\,(\Gamma, A)\,B \to \mathsf{Tm}\,\Gamma\,(\Pi\,A\,B) \\
\ldots & \\
\beta &: \mathsf{app}\,(\mathsf{lam}\,t) \equiv t \\
\eta &: \mathsf{lam}\,(\mathsf{app}\,t) \equiv t
\end{aligned}
$$

Eliminator

- Non-dependent:

  $(\mathsf{Con}^{\mathsf{M}} : \mathsf{Set})(\mathsf{Ty}^{\mathsf{M}} : \mathsf{Con}^{\mathsf{M}} \to \mathsf{Set}) \ldots$

  $\ldots (\beta^{\mathsf{M}} : \mathsf{app}^{\mathsf{M}}\,(\mathsf{lam}^{\mathsf{M}}\,t^{M}) \equiv t^{M})$

  $\mathsf{Rec}_{\mathsf{Con}} : \mathsf{Con} \to \mathsf{Con}^{\mathsf{M}}$

  $\mathsf{Rec}_{\mathsf{Ty}} : \mathsf{Ty}\,\Gamma \to \mathsf{Ty}^{\mathsf{M}}\,(\mathsf{Rec}_{\mathsf{Con}}\,\Gamma)$

- Dependent:

  $(\mathsf{Con}^{\mathsf{M}} : \mathsf{Con} \to \mathsf{Set})(\mathsf{Ty}^{\mathsf{M}} : \mathsf{Con}^{\mathsf{M}}\,\Gamma \to \mathsf{Ty}\,\Gamma \to \mathsf{Set}) \ldots$

  $\mathsf{Elim}_{\mathsf{Con}} : (\Gamma : \mathsf{Con}) \to \mathsf{Con}^{\mathsf{M}}\,\Gamma$

  $\mathsf{Elim}_{\mathsf{Ty}} : (A : \mathsf{Ty}\,\Gamma) \to \mathsf{Ty}^{\mathsf{M}}\,(\mathsf{Elim}_{\mathsf{Con}}\,\Gamma)\,A$

Quotient inductive types in Agda

```
{-# OPTIONS --rewriting #-}

postulate
  Con : Set
  Ty  : Con → Set
  _,_ : (Γ : Con) → Ty Γ → Con

  RecCon : Con → Conᴹ
  RecTy  : Ty Γ → Tyᴹ (RecCon Γ)

  β, : RecCon (Γ , A) ≡ RecCon Γ ,ᴹ RecTy A

{-# REWRITE β, #-}
```

Relation to old-style syntax

Conjecture:

$$\mathsf{Con} \;\cong\; \Big((\overline{\Gamma} : \overline{\mathsf{Con}}) \times \vdash \overline{\Gamma}\Big)/{\sim_{\mathsf{Con}}}$$

$$\begin{aligned} &(\Gamma : \mathsf{Con}) \;\times\; \mathsf{Ty}\,\Gamma \\ \cong\; &\Big((\overline{\Gamma} : \overline{\mathsf{Con}}) \;\times \vdash \overline{\Gamma} \;\times\; (\overline{A} : \overline{\mathsf{Ty}}) \;\times\; \overline{\Gamma} \vdash \overline{A}\Big)/{\sim_{\mathsf{Con}}}/{\sim_{\mathsf{Ty}}} \end{aligned}$$

$$\ldots$$

Models formalised

For a theory with Π, a base type and a family over the base type.

- Non-dependent eliminator:
  - standard model
  - presheaf model
  - setoid model
- Dependent eliminator:
  - logical predicate translation of Bernardy
  - presheaf logical predicate interpretation

Neutral terms and normal forms

$$n ::= x \mid n\, v$$
$$v ::= n \mid \lambda x.v$$

The intrinsically typed version:

$$\begin{aligned}
\mathsf{Ne} &: (\Gamma : \mathsf{Con}) \to \mathsf{Ty}\,\Gamma \to \mathsf{Set} \\
\mathsf{Nf} &: (\Gamma : \mathsf{Con}) \to \mathsf{Ty}\,\Gamma \to \mathsf{Set} \\
\mathsf{var} &: \mathsf{Var}\,\Gamma\,A \to \mathsf{Ne}\,\Gamma\,A \\
\mathsf{app} &: \mathsf{Ne}\,\Gamma\,(\Pi\,A\,B) \to (v : \mathsf{Nf}\,\Gamma\,A) \to \mathsf{Ne}\,\Gamma\,\big(B[\langle \ulcorner v \urcorner \rangle]\big) \\
\mathsf{neu} &: \mathsf{Ne}\,\Gamma\,\iota \to \mathsf{Nf}\,\Gamma\,\iota \\
\mathsf{lam} &: \mathsf{Nf}\,(\Gamma, A)\,B \to \mathsf{Nf}\,\Gamma\,(\Pi\,A\,B)
\end{aligned}$$

Normalisation

$$\begin{aligned}
\mathsf{norm} &: (t : \mathsf{Tm}\,\Gamma\,A) \to (v : \mathsf{Nf}\,\Gamma\,A) \times t \equiv \ulcorner v \urcorner \\
\mathsf{stab} &: (v : \mathsf{Nf}\,\Gamma\,A) \to \mathsf{norm}\,\ulcorner v \urcorner \equiv v
\end{aligned}$$

Decidability of equality

$$\mathsf{Dec}\,A = A + \neg A$$
$$X \in \{\mathsf{Ne}, \mathsf{Nf}\}$$

First try:

$$\mathsf{dec}_X : (n_0\, n_1 : X\, \Gamma\, A) \to \mathsf{Dec}\,(n_0 \equiv n_1)$$

Decidability of equality

$$\mathrm{Dec}\, A = A + \neg A$$
$$X \in \{\mathrm{Ne}, \mathrm{Nf}\}$$

First try:

$$\mathrm{dec}_X : (n_0\; n_1 : X\, \Gamma\, A) \to \mathrm{Dec}\, (n_0 \equiv n_1)$$

Problem:

$$\mathrm{app}\, n_0\; v_0 : \mathrm{Ne}\, \Gamma\, (B_0[\langle \ulcorner v_0 \urcorner \rangle])$$
$$\mathrm{app}\, n_1\; v_1 : \mathrm{Ne}\, \Gamma\, (B_1[\langle \ulcorner v_1 \urcorner \rangle])$$

Decidability of equality

$$\mathrm{Dec}\, A = A + \neg A$$
$$X \in \{\mathrm{Ne}, \mathrm{Nf}\}$$

First try:

$$\mathrm{dec}_X : (n_0\, n_1 : X\, \Gamma\, A) \to \mathrm{Dec}\, (n_0 \equiv n_1)$$

Problem:

$$\mathrm{app}\, n_0\, v_0 : \mathrm{Ne}\, \Gamma\, (B_0[\langle \ulcorner v_0 \urcorner \rangle])$$
$$\mathrm{app}\, n_1\, v_1 : \mathrm{Ne}\, \Gamma\, (B_1[\langle \ulcorner v_1 \urcorner \rangle])$$

$$n_0 : \mathrm{Ne}\, \Gamma\, (\Pi\, A_0\, B_0) \qquad n_1 : \mathrm{Ne}\, \Gamma\, (\Pi\, A_1\, B_1)$$

Decidability of equality

$$\mathsf{Dec}\, A = A + \neg A$$
$$X \in \{\mathsf{Ne}, \mathsf{Nf}\}$$

Second try:

$$\begin{aligned}\mathsf{dec}_X : (n_0 : X\,\Gamma\,A_0)(n_1 : X\,\Gamma\,A_1) \\ \to \mathsf{Dec}\,\big((q : A_0 \equiv A_1) \times (n_0 \equiv^q n_1)\big)\end{aligned}$$

Decidability of equality

$$\mathsf{Dec}\,A = A + \neg A$$
$$X \in \{\mathsf{Ne}, \mathsf{Nf}\}$$

Second try:

$$\begin{aligned}\mathsf{dec}_X :\ & (n_0 : X\,\Gamma\,A_0)(n_1 : X\,\Gamma\,A_1) \\ & \to \mathsf{Dec}\,\big((q : A_0 \equiv A_1) \times (n_0 \equiv^q n_1)\big)\end{aligned}$$

Problem:

$$\mathsf{lam}\,v_0 : \mathsf{Nf}\,\Gamma\,(\Pi\,A_0\,B_0)$$
$$\mathsf{lam}\,v_1 : \mathsf{Nf}\,\Gamma\,(\Pi\,A_1\,B_1)$$

Decidability of equality

$$\mathrm{Dec}\,A = A + \neg A$$
$$X \in \{\mathrm{Ne}, \mathrm{Nf}\}$$

Second try:

$$\begin{aligned}\mathrm{dec}_X : (n_0 : X\,\Gamma\,A_0)(n_1 : X\,\Gamma\,A_1)\\ \to \mathrm{Dec}\,\big((q : A_0 \equiv A_1) \times (n_0 \equiv^q n_1)\big)\end{aligned}$$

Problem:

$$\mathrm{lam}\,v_0 : \mathrm{Nf}\,\Gamma\,(\Pi\,A_0\,B_0)$$
$$\mathrm{lam}\,v_1 : \mathrm{Nf}\,\Gamma\,(\Pi\,A_1\,B_1)$$

$$v_0 : \mathrm{Nf}\,(\Gamma, A_0)\,B_0 \qquad v_1 : \mathrm{Nf}\,(\Gamma, A_1)\,B_1$$

Decidability of equality

$$\mathsf{Dec}\,A = A + \neg A$$
$$X \in \{\mathsf{Ne}, \mathsf{Nf}\}$$

Third try:

$$\mathsf{dec}_X : (n_0 : X\,\Gamma_0\,A_0)(n_1 : X\,\Gamma_1\,A_1)$$
$$\to \mathsf{Dec}\,\big((p : \Gamma_0 \equiv \Gamma_1) \times (q : A_0 \equiv^{p} A_1) \times (n_0 \equiv^{p,q} n_1)\big)$$

Decidability of equality

$$\mathrm{Dec}\, A = A + \neg A$$
$$X \in \{\mathrm{Ne}, \mathrm{Nf}\}$$

Third try:

$$\begin{aligned}&\mathrm{dec}_X : (n_0 : X\,\Gamma_0\,A_0)(n_1 : X\,\Gamma_1\,A_1)\\&\quad\to \mathrm{Dec}\,\big((p : \Gamma_0 \equiv \Gamma_1) \times (q : A_0 \equiv^p A_1) \times (n_0 \equiv^{p,q} n_1)\big)\end{aligned}$$

Problem:

We'd need normal forms indexed by normal types.

Bidirectional type checking

Ne:	the context determines the type	(type inference)
Nf:	the type is an input	(type checking)

Bidirectional type checking

Ne:	the context determines the type	(type inference)
Nf:	the type is an input	(type checking)

Solution:

$$\begin{aligned}
&\mathsf{dec}_{\mathsf{Ne}} : (n_0 : \mathsf{Ne}\,\Gamma\,A_0)(n_1 : \mathsf{Ne}\,\Gamma\,A_1) \\
&\qquad \to \mathsf{Dec}\,\big((q : A_0 \equiv A_1) \times (n_0 \equiv^q n_1)\big) \\
&\mathsf{dec}_{\mathsf{Nf}} : (v_0\,v_1 : \mathsf{Nf}\,\Gamma\,A) \to \mathsf{Dec}\,(v_0 \equiv v_1)
\end{aligned}$$

Summary

- Intrinsically typed syntax quotiented by conversion
- Formalised in Agda
- Normalisation can be proved and equality is decidable
- Future work:
  - Extend the theory with more type formers
  - We used K in our metatheory. What if we don't?

TYPES 2017, 29 May – 1 June

NBE for dependent types

Yoneda embedding

$\mathsf{Y}_\Gamma : \mathsf{REN}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{Set}$

$\mathsf{Y}_A : \Sigma_{\mathsf{REN}}\, \mathsf{Y}_\Gamma \to \mathsf{Set}$

$\mathsf{Y}_\sigma : \mathsf{Y}_\Gamma \dot{\to} \mathsf{Y}_\Delta$

$\mathsf{Y}_t : \mathsf{Y}_\Gamma \xrightarrow{\mathsf{s}} \mathsf{Y}_A$

Presheaf logical predicate

$\mathsf{P}_\Gamma : \Sigma_{\mathsf{REN}}\, \mathsf{Y}_\Gamma \to \mathsf{Set}$

$\mathsf{P}_A : \Sigma_{\mathsf{REN}, \mathsf{Y}_\Gamma, \mathsf{Y}_A}\, \mathsf{P}_\Gamma \to \mathsf{Set}$

$\mathsf{P}_\sigma : \Sigma_{\mathsf{Y}_\Gamma}\, \mathsf{P}_\Gamma \xrightarrow{\mathsf{s}} \mathsf{P}_\Delta[\mathsf{Y}_\sigma]$

$\mathsf{P}_t : \Sigma_{\mathsf{Y}_\Gamma}\, \mathsf{P}_\Gamma \xrightarrow{\mathsf{s}} \mathsf{P}_A[\mathsf{Y}_t]$

At the base type:

$$\mathsf{P}_\iota\, t = (v : \mathsf{Nf}\,\Gamma\,\iota) \times (t \equiv \ulcorner v \urcorner)$$